

O. Bădescu, M. Cimpoeșu, Gh. Crăciun, H. Csapó,
M. Georgescu, M. Haiducu, G. Marinescu,
C. Mogoș, M. Păunescu, L. Petrescu, A. Poștaru,
A. Răducan, G. Răducan, C. Scăiceanu,
N. Seimeanu, N. Stănică, N. Suciu, M. Zaharia

Pregătirea examenului de

Evaluare națională

în 25 de săptămâni

MATEMATICĂ

2017



O. Bădescu, M. Cimpoeșu, Gh. Crăciun, H. Csapó,
M. Georgescu, M. Haiducu, G. Marinescu, C. Mogoș,
M. Păunescu, L. Petrescu, A. Poștaru, A. Răducan, G. Răducan,
C. Scăiceanu, N. Seimeanu, N. Stănică, N. Suci, M. Zaharia

Pregătirea examenului de
EVALUARE NAȚIONALĂ
2017
în 25 de săptămâni
Matematică





CUPRINS

<i>Cuvânt înainte</i>	3
<i>Temele recapitulate în testele săptămânale</i>	4
<i>Programa pentru evaluarea națională la matematică</i>	6
<i>Memorator</i>	19

Recapitularea materiei prin exerciții și probleme

	<i>Enunțuri</i>	<i>Soluții</i>
1. Mulțimea numerelor reale	29	51
2. Calcul algebric	33	53
3. Funcții	35	54
4. Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații	36	55
5. Elemente de organizarea datelor	39	57
6. Măsurare și măsuri	40	57
7. Triunghiul	41	57
8. Patrulaterul convex	42	58
9. Cercul	44	59
10. Puncte, drepte, plane, unghiuri, corpuri geometrice	45	60

Planificarea săptămânală a recapitulării pentru Evaluarea Națională 66

Modele de teste săptămânale pentru recapitulare

<i>Enunțuri</i>	69
<i>Indicații și rezolvări</i>	101

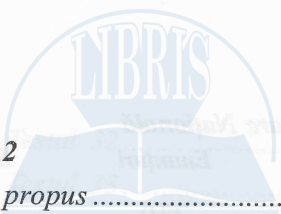
Subiectele date sau propuse de către minister

2010

<i>Model propus</i>	127	181
<i>Subiectul dat în sesiunea specială</i>	128	182
<i>Subiectul dat în sesiunea iunie-iulie</i>	130	184

2011

<i>Model propus</i>	131	185
<i>Subiectul dat în sesiunea specială</i>	133	187
<i>Subiectul dat în sesiunea iunie-iulie</i>	134	189

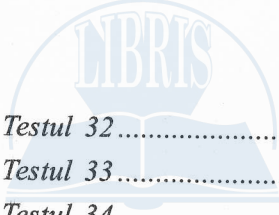


2012		
<i>Model propus</i>	136	190
<i>Subiectul dat în sesiunea specială</i>	138	192
<i>Subiectul dat în sesiunea iunie-iulie</i>	139	194
<i>Varianta de rezervă</i>	141	195
2013		
<i>Model propus</i>	142	196
<i>Subiectul dat în sesiunea specială</i>	144	198
<i>Subiectul dat în sesiunea iunie-iulie</i>	146	199
<i>Varianta de rezervă</i>	147	201
2014		
<i>Model propus</i>	149	202
<i>Testul de pregătire 1</i>	150	204
<i>Testul de pregătire 2</i>	152	205
<i>Testul de pregătire 3</i>	154	206
<i>Testul de pregătire 4</i>	156	208
<i>Testul de pregătire 5</i>	157	209
<i>Subiectul dat în sesiunea specială</i>	159	211
<i>Subiectul dat în sesiunea iunie-iulie</i>	161	212
<i>Varianta de rezervă</i>	162	213
2015		
<i>Model propus</i>	164	215
<i>Simulare</i>	166	216
<i>Subiectul dat în sesiunea specială</i>	167	218
<i>Subiectul dat în sesiunea iunie-iulie</i>	169	219
<i>Varianta de rezervă</i>	170	220
2016		
<i>Model propus</i>	172	222
<i>Simulare</i>	173	223
<i>Subiectul dat în sesiunea specială</i>	175	225
<i>Subiectul dat în sesiunea iunie-iulie</i>	176	226
<i>Varianta de rezervă</i>	178	228



Teste finale pentru pregătirea Examenului de Evaluare Națională

	Enunțuri	Soluții
Testul 1	230	289
Testul 2	231	289
Testul 3	232	290
Testul 4	234	291
Testul 5	235	292
Testul 6	236	293
Testul 7	238	294
Testul 8	239	295
Testul 9	240	296
Testul 10	241	297
Testul 11	242	298
Testul 12	244	299
Testul 13	245	299
Testul 14	246	301
Testul 15	248	301
Testul 16	249	302
Testul 17	250	304
Testul 18	252	304
Testul 19	253	305
Testul 20	254	306
Testul 21	255	307
Testul 22	257	308
Testul 23	258	309
Testul 24	259	309
Testul 25	261	311
Testul 26	262	312
Testul 27	263	312
Testul 28	265	313
Testul 29	266	314
Testul 30	267	316
Testul 31	269	316



<i>Testul 32</i>	270	317
<i>Testul 33</i>	271	318
<i>Testul 34</i>	272	319
<i>Testul 35</i>	273	321
<i>Testul 36</i>	275	322
<i>Testul 37</i>	276	323
<i>Testul 38</i>	277	324
<i>Testul 39</i>	279	324
<i>Testul 40</i>	280	325
<i>Testul 41</i>	281	326
<i>Testul 42</i>	283	327
<i>Testul 43</i>	284	328
<i>Testul 44</i>	285	329
<i>Testul 45</i>	287	330



MEMORATOR

ALGEBRĂ

Operații cu puteri

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{Z}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{Z}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{Z}$
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{Z}$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{Z}$
6. $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Modulul unui număr real

1. $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$
2. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
5. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, oricare ar fi a

Partea întreagă și fracționară a unui număr real

1. $x = [x] + \{x\}$
3. $[x] \leq x < [x] + 1$
2. $[x] \in \mathbb{Z}$
4. $0 \leq \{x\} < 1$

Operații cu radicali

1. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $a \geq 0, b \geq 0$
2. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $a \geq 0, b > 0$
3. $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$, $a > 0, n \in \mathbb{Z}$
4. $(a\sqrt{b})^n = a^n \sqrt{b^n}$, $a \neq 0, b > 0, n \in \mathbb{Z}$
5. $\sqrt{a^2} = |a|$, $a \in \mathbb{R}$

Raționalizarea numitorului

$$1. \frac{\sqrt{c}}{b\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b \cdot c}, c > 0, b \neq 0$$

$$2. \frac{\sqrt{b+\sqrt{c}}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}, b > 0, c > 0$$

$$3. \frac{\sqrt{b-\sqrt{c}}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}, b > 0, c > 0$$

Formule de calcul prescurtat

$$1. (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$2. (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$3. (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

$$\text{Media aritmetică: } m_a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

$$\text{Media aritmetică ponderată: } m_p = \frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \dots + a_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}.$$

$$\text{Media geometrică: } m_g = \sqrt{a \cdot b}, a \geq 0, b \geq 0$$

$$\text{Inegalitatea mediilor: } m_a \geq m_g$$

Funcția de gradul I:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a \neq 0.$
- Graficul funcției de gradul I este o dreaptă.
- $G_f \cap O_x = \left\{ A\left(-\frac{b}{a}, 0\right) \right\}, G_f \cap O_y = \{ B(0, b) \}$ (punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate)

Ecuația de gradul al doilea

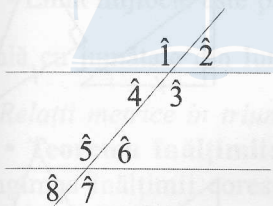
$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Dacă $\Delta > 0$, atunci există $x_{1,2} \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$
- Dacă $\Delta = 0$, atunci există $x_{1,2} \in \mathbb{R}, x_1 = x_2$
- Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația nu are rădăcini reale.

GEOMETRIE PLANĂ

Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă



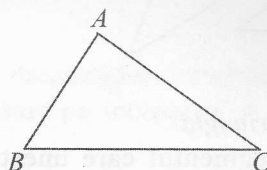
$\hat{1} \equiv \hat{7}, \hat{2} \equiv \hat{8}$ (unghiuri alterne externe)

$\hat{3} \equiv \hat{5}, \hat{4} \equiv \hat{6}$ (unghiuri alterne interne)

$\hat{1} \equiv \hat{5}, \hat{4} \equiv \hat{8}, \hat{2} \equiv \hat{6}, \hat{3} \equiv \hat{7}$ (unghiuri corespondente)

Triunghiuri

• $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180^\circ$

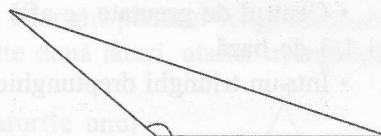
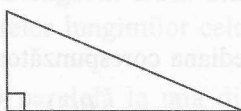
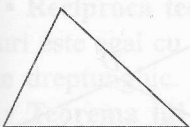


Clasificare după unghiuri:

♦ Triunghi ascuțitunghic

♦ Triunghi dreptunghic

♦ Triunghi obtuzunghic

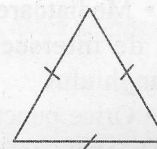
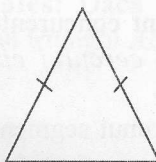
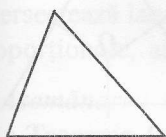


Clasificare după laturi:

♦ Triunghi oarecare (scalene)

♦ Triunghi isoscel

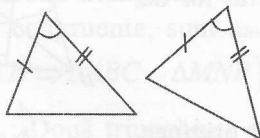
♦ Triunghi echilateral



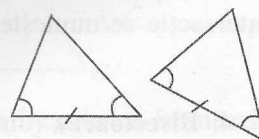
♦ Cazuri de congruență:

Triunghiuri oarecare

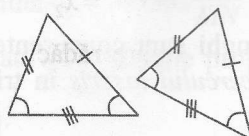
I. L.U.L.



II. U.L.U.

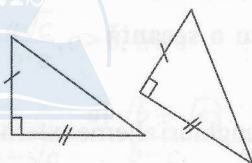


III. L.L.L.

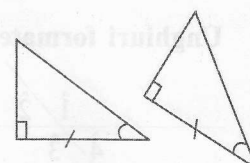


Triunghiuri dreptunghice

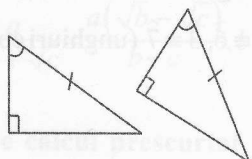
I. C.C.



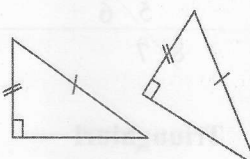
II. C.U.



III. I.U.



IV. I.C.



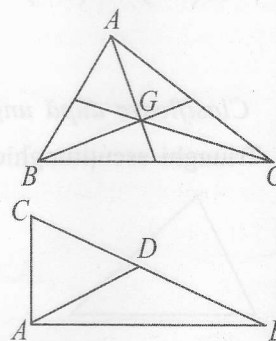
♦ Linii importante în triunghi:

1. **Mediana** este segmentul care unește un vârf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse.

• Medianele unui triunghi sunt concurente; punctul lor de intersecție este *centrul de greutate* al triunghiului.

• Centrul de greutate se află pe mediană la $\frac{2}{3}$ de vârf și $\frac{1}{3}$ de bază.

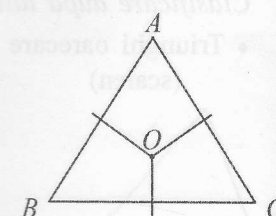
• Într-un triunghi dreptunghic mediana corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din ipotenuză ($AD = \frac{BC}{2}$).



2. **Mediatoarea** este dreapta perpendiculară pe o latură dusă prin mijlocul acesteia.

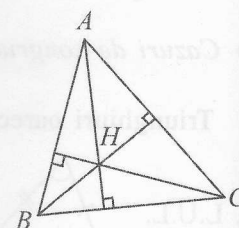
• Mediatoarele unui triunghi sunt concurente; punctul lor de intersecție este în *centrul cercului circumscris* triunghiului.

• Orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele segmentului.



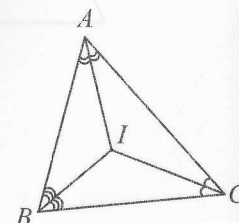
3. **Înălțimea** este perpendiculara dusă dintr-un vârf al triunghiului pe latura opusă.

• Înălțimile unui triunghi sunt concurente; punctul lor de intersecție se numește *ortocentrul* triunghiului.



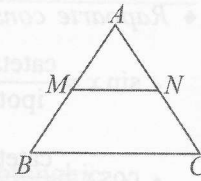
4. **Bisectoarea** (unui unghi) este semidreapta cu originea în vârful unghiului, care împarte unghiul în două unghiuri congruente.

• Bisectoarele unui triunghi sunt concurente; punctul lor de intersecție este *centrul cercului înscris* în triunghi.



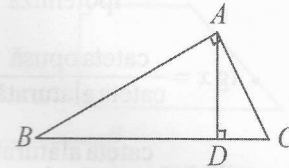
5. **Linia mijlocie** este segmentul determinat de mijloacele a două laturi dintr-un triunghi.

• Linia mijlocie este paralelă cu a treia latură și are lungimea egală cu jumătate din lungimea acesteia ($MN = \frac{BC}{2}$).



♦ **Relații metrice în triunghiuri**

• **Teorema înălțimii:** Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză ($AD^2 = BD \cdot DC$).

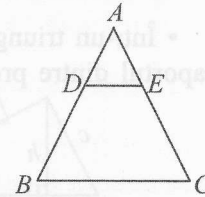


• **Teorema catetelor:** Într-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este media geometrică a lungimii proiecției sale pe ipotenuză și a lungimii ipotenuzei ($AB^2 = BD \cdot BC$, $AC^2 = CD \cdot BC$).

• **Teorema lui Pitagora:** Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor ($BC^2 = AB^2 + AC^2$).

• **Reciproca teoremei lui Pitagora:** Dacă într-un triunghi pătratul lungimii unei laturi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.

• **Teorema lui Thales:** O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi, sau pe prelungirile lor, segmente proporționale. $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.



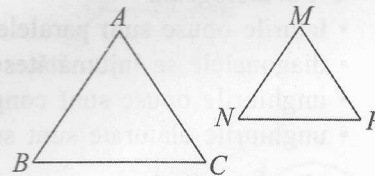
• **Reciproca teoremei lui Thales:** Dacă o dreaptă DE intersectează laturile AB și AC ale unui triunghi ABC și determină pe acestea segmente proporționale, atunci ea este paralelă cu BC.

♦ **Asemănarea triunghiurilor**

• **Teorema fundamentală a asemănării.** O paralelă dusă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi un triunghi asemenea cu cel inițial ($DE \parallel BC \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$).

• **Criterii de asemănare:**

1. U.U.: Două triunghiuri care au două perechi de unghiuri congruente, sunt asemenea ($\hat{A} \equiv \hat{M}, \hat{B} \equiv \hat{N} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP$).



2. L.U.L.: Două triunghiuri care au un unghi congruent și laturile ce formează unghiul sunt proporționale, sunt asemenea ($\hat{A} \equiv \hat{M}, \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP$).

3. L.L.L.: Două triunghiuri care au toate laturile proporționale, sunt asemenea. ($\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP$).